TITLE:
Equivariant S-Duality (同変ホモトピー論)

AUTHOR(S):
村山, 光孝

CITATION:
村山, 光孝. Equivariant S-Duality (同変ホモトピー論). 数理解析研究所講究録 1978, 319: 84-99

ISSUE DATE:
1978-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/103987

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
319巻 1978年 84-99

Equivariant S-duality

阪市大理　　村山光孝

Gを有限群とするとき，G-equivariant stable homotopyに対して，Spanier[12]と同様の議論ができ，それによってG-homologyとG-cohomologyの間のdualityについて論じることを目的とする。

§1では，その準備として，unstable G-homotopyの性質，特にBlakers-Masseyの定理，suspension同型について調べる。§2では，Equivariant S-dualityについて，[12]，[1] に従って論じる。

§1 G-homotopy groups

Gをcompact Lie groupとする。G-CW complex([9])は同変写像に対して，CW-complexと同様の構成が可能である。例えば，G-H.E.Pをもち，G-胞体近似，J.H.C Whiteheadの定理，等が成立する。(c.f. [9]) さらに次の命題が成り立つ。

以下簡略化の為にG-spaceでpointed G-spaceを表わし，G-mapは基点を保つものとする。又$\mathcal{S}(G)$はGの閉部分群全体からなる集合，とする。

<u>命題1.1</u>　XをG-space，(K,L)をG-CW complex pairとする。$\forall H\in\mathcal{S}(G)$に対し$X^H=\{x\in X \mid gx=x,\ g\in H\}$は$n_H$-connected，かつ$\dim_G(K^H-L^H)\leq n_H+1$，$n_H\geq -1$ならば，任意のG-map $f:L\to X$はK上に（G-mapとして）拡張可能である。

[証明]　Kのs-skeleton K^sにfが帰納的に拡張されることを示す。K^{s-1}まで拡張されたと仮定する。$e^s\subset K-L$をs-cellでisotropy subgroupがHであるものとすれば，$s\leq n_H+1$，$f(\partial e^s)\subset X^H$であるから，fは$e^s$に，$f(e^s)\subset X^H$をみたすように拡張できる。これをG-actionで拡張すれば，fは$K^{s-1}\cup Ge^s$上にG-mapとして拡張される。これを続ければよい。　（終）

<u>命題1.2</u>　(X,A)をG-space pair，(K,L)をG-CW complex pairとする。$\forall H\in\mathcal{S}(G)$に対し，$(X^H,A^H)$は$n_H$-connected，かつ$\dim_G(K^H-L^H)\leq n_H$，$n_H\geq 0$ならば，任意の（pairの）G-map $f:(K,L)\to(X,A)$は，AへのG-mapにG-homotopic relative A，である。

証明は1.1と同様にすればよい。

写像のn-equivalenceの定義は[13] p404を参照する。上の命題により，[13] Theorem 7.6.22，[8] 4章，定理2.15と同様にして

次の命題を得る。

<u>命題 1.3</u>　X、Y を G-space，$f: X \to Y$ を G-map とする。$f^H = f|_{X^H}: X^H \to Y^H$ が n_H-equivalence, $n_H \geq 0$, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ ならば，G-CW complex K に対して，

$$f_*: [K, X]^G \to [K, Y]^G$$

は，すべての $H \in \mathcal{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H < n_H$ のとき同型，$\dim_G K^H \leq n_H$ のとき全射，である。

この relative form として次を得る。

<u>命題 1.4</u>　(X, A)，(Y, B) を G-space pair で $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し (X^H, A^H)，(Y^H, B^H) は 1-connected とする。$f: (X, A) \to (Y, B)$ は G-map で，$\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

$$f_*^H: \pi_i(X^H) \to \pi_i(Y^H)$$

は $i < n_H$ のとき同型，$i = n_H$ のとき全射，であるものとする。このとき，G-CW complex K に対して

$$f_*: [CK, K; X, A]^G \to [CK, K; Y, B]^G$$

は，$\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 < n_H$ のとき同型，$\dim_G K^H + 1 \leq n_H$ のとき全射である。（ここで CK は K の cone。）

上の命題と Blakers-Massey [5] を組み合わせて次の命題を得る。

<u>命題 1.5</u>　(X, A) は次をみたす G-space pair とする。A は X の closed G-subspace。$\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して，

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geqq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geqq 1$

$i:(X,A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$, $i':(CA, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ を

inclusion とするとき，G-CW complex K に対し

$i_*: [CK, K; X, A]^G \longrightarrow [CK, K; X \cup CA, CA]^G$,

$i'_*: [CK, K; CA, A]^G \longrightarrow [CK, K; X \cup CA, CA]^G$

は $^\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H$ のとき同型，

$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H + 1$ のとき全射，である。

G-CW complex pair (X, A) は G-HEP をもつので $X \cup CA \underset{G}{\simeq} X/A$

が成り立つ。従って上の命題を次の様に書き直せる。

<u>定理 1.6</u>　(X, A) は G-CW complex pair で，$^\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geqq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geqq 1$,

とする。このとき G-CW complex K に対して

$p_*: [CK, K; X, A]^G \longrightarrow [\Sigma K, X/A]^G$

は $^\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H$ のとき同型，

$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H + 1$ のとき全射である。

G を有限群とするとき，G-CW complex は G-complex (Bredon[6])

になる。G-spectrum $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を次の様に定義する。(cf.[1])

ω を，同値でない既約 G-module を 1 つずつ含む G-module と

する。E_n は G-complex の G-homotopy type をもつ G-space とし，

$\varepsilon_n: \Sigma^\omega E_n \to E_{n+1}$ を G-map とする。ここで Σ^ω は ω の 1点 compact

化である。smooth G-manifold は G-CW complex structure をもつ

（G が compact Lie group のとき，[10]）ので，Σ^{W} は G-CW complex structure を（従って G-complex structure を）もつ。

G-spectrum $\mathbb{E}$，G-space X, Y，$\alpha = \bar{V} - \bar{W} \in RO(G)$，$\bar{V}, \bar{W}$ G-module に対し $[X, \mathbb{E}\wedge Y]^G$ を

$$[X, \mathbb{E}\wedge Y]^G = \varinjlim_{n} [\Sigma^{nW+V} X, E_n \Sigma^{W} \wedge Y]^G$$

（$\Sigma^{V}X = \Sigma^{V}\wedge X$，$E_n\Sigma^{W} = E_n\wedge\Sigma^{W}$）と定義する。$X$ を fixed finite G-complex とするとき，上の定理が適用できて，$[X, \mathbb{E}\wedge(\ )]^G_{\alpha}$ は G-complex の category 上の half exact functor であることが示される。

次に写像空間 $F(X,Y)$ について論じる。G-space X, Y に対して $F(X,Y)$ は，G-action を，$g(f)(x) = gf(g^{-1}x)$ で定義して G-space になる。このとき，$F(X,Y)^G$ は G-map 全体になる。特に，$F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ となる。X Y を locally compact G-space，X, Z を G-space とすると，

$$[X\wedge Y, Z]^G \cong [X, F(Y,Z)]^G$$

が成立する。このとき次が成り立つ。

<u>補題 1.7</u>　X を locally compact G-CW complex，Y を G-space とする。$r : F(X,Y)^G \longrightarrow F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ を制限写像とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，Y^H は n_H connected, $n_H \geqq 0$ とするとき

$$r_* : \pi_j(F(X,Y)^G) \longrightarrow \pi_j(F(X^G, Y^G))$$

は $\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，$j \leqq n_H$ のとき同型，$j \leqq n_H+1$ のとき全射

である。ここで

$$N_H = \begin{cases} n_H - \dim_G (X^H - X^G) & \text{if } X^H \neq X^G \\ \infty & \text{if } X^H = X^G \end{cases}$$

[証明] $\pi_j(F(X,Y)^G) = [\Sigma^j, F(X,Y)^G] \cong [\Sigma^j \wedge X, Y]^G$

であるから

$$(1\wedge i)^* : [\Sigma^j \wedge X, Y]^G \to [\Sigma^j \wedge X^G, Y]^G$$

を考えればより。命題1.1を用いて，$1\wedge i$ に対して [8], 4章定理2.15と同様な議論を行なえば，この命題を得る。 終

X, Yを G-space とする。G-module Vに対し Σ^V-suspension

$$\Sigma^V_* : [X, Y]^G \to [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

を考える。これは adjoint isomorphism

$$[\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G \cong [X, \Omega^V \Sigma^V Y]^G$$

を通して次の写像に移して考えることができる。

$$i_* : [X, Y]^G \to [X, \Omega^V \Sigma^V Y]^G$$

ここで $\Omega^V \Sigma^V Y = F(\Sigma^V, \Sigma^V Y)$, $i : Y \hookrightarrow \Omega^V \Sigma^V Y$ は $i(y)(t) = (t, y)$ で定義される inclusion である。Σ^Vは compact G-CW complex と考えられるので，i_*に上の命題を適用して次を得る。

<u>定理 1.8</u> Xは G-CW complex, Yは G-space with non-degenerate base point とする。$^\forall H \in \mathcal{S}(G)$に対し Y^Hは n_H-connected, $n_H \geq 0$ ならば，

$$\Sigma^V_* : [X, Y]^G \to [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

は，$\forall H \in \mathscr{S}(G)$ に対して，$\dim_G X^H \leq \min_{H' \in \mathscr{S}(H)} N_{H'}^H$ のとき同型，$\dim_G X^H \leq \min_{H' \in \mathscr{S}(H)} N_{H'}^H + 1$ のとき全射である。ここで

$$N_{H'}^H = \begin{cases} 2n_H & \text{if } H' = H \text{ かつ } V^H \neq \{0\} \\ n_{H'} - 1 + \dim V^{H'} - \dim_H (V^{H'} - V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{others} \end{cases}$$

注意. $\dim V^{H'}$ は，一般には $\dim_H V^{H'}$ とは異なるが，G が有限群（$\dim G = 0$）のときは一致する。（$\dim_G X^H$ は $G \cdot X^H$ の G-CW complex としての次元を表わす。）従って，G が有限群のとき，上の $N_{H'}^H$ で $V^{H'} \neq V^H$ の部分は $(n_{H'} - 1)$ と書き直される。

[証明]　次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} \pi_j(Y^H) \arrow[r, "i_*^H"] \arrow[dr, "i_{H*}"'] & \pi_j((\Omega^V \Sigma^V Y)^H) \arrow[d, "r_{H*}"] \\ & \pi_j(\Omega^{V^H} (\Sigma^V Y)^H) \end{tikzcd}$$

ここで，i，i_H は inclusion，r_H は restriction である。i_H は suspension theorem により $(2n_H + 1)$-equivalence である。特に $V^H = \{0\}$ のときは $\Omega^{V^H} \Sigma^{V^H} Y^H = Y^H$ となるので i_H は ∞-equivalence である。又，r_H は補題 1.7 により $(\min_{H' \in \mathscr{S}(H)} M_{H'}^H + 1)$-equivalence である。ここで

$$M_{H'}^H = \begin{cases} n_{H'} + \dim V^{H'} - \dim_H (V^{H'} - V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{if } V^{H'} = V^H \end{cases}$$

である。今 i_*^H が単射であるのは i_{H*} が単射のとき，又全射

であるのは i_{H*} が全射かつ γ_{H*} が同型のときである。
これらを組み合わせて i^H が $(\min_{H'\in\mathcal{S}(H)} N^H_{H'}+1)$-equivalenceであることがわかる。これに命題1.3を適用すればより。 終

注意 $^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対して，$V^H\neq\{0\}$ となる(既約) G-module が存在する。従ってGを有限群とするとき，ω はこの様なものをすべて含んでいるので $H'\subsetneqq H$ なる部分群 H, H' に対して $\dim V^{H'}\geqq\dim V^H+1$ となる。$\pi^G_V(X)=[\Sigma^V, X]^G$ とするとき，上の定理より，$\Sigma^\omega_*:\pi^G_{n\omega}(\Sigma^{n\omega}X)\to\pi^G_{(n+1)\omega}(\Sigma^{(n+1)\omega}X)$ は $n\geqq 2$ のとき同型，$n\geqq 1$ のとき全射である。

§2 Equivariant S-duality

Gは有限群とする。α-th stable G-homotopy group を

$$\{X, Y\}^G_\alpha=\varinjlim_n[\Sigma^{n\omega+V}X, \Sigma^{n\omega+W}Y]^G$$

と表わす。ここで $\alpha=V-W\in RO(G)$。$\mathcal{CT}^G_*$ を $^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対して X^H が path-connected である様な ~~(finite)~~ G-complex X の category とする。$X, X'\in\mathcal{CT}^G_*$ に対し G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ を，$^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対し $u^H: X^H\wedge X'^H\to\Sigma^{V^H}$ が duality map であるとき([12])，V-duality G-map と呼ぶ。又このとき X' を X の V-dual と呼ぶ。$u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ に対し，$\bar{u}: X'\wedge X\overset{T}{\approx}X\wedge X'\xrightarrow{u}\Sigma^V$，

$$u_{V_1,V_2}:\Sigma^{V_1}X\wedge\Sigma^{V_2}X'\overset{1\wedge T\wedge 1}{\approx}\Sigma^{V_1}\wedge\Sigma^{V_2}\wedge X\wedge X'\xrightarrow{1\wedge u}\Sigma^{V_1+V_2}\Sigma^V\approx\Sigma^{V_1+V_2+V}$$

も又 duality G-map である。

Y を finite G-complex, $u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar v}$ を duality G-map とする。準同型 $\Gamma_u^\alpha : \{Y, X\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G$, $\bar\Gamma_u^\alpha : \{Y, X'\}_\alpha^G \to \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G$ を次の様に定義する。G-map $f: \Sigma^{n\omega+\bar v} Y \to \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X$ に対し, $\Gamma_u^\alpha\{f\} \in \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G$ は, 次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar v} Y\wedge X' \xrightarrow{f\wedge 1} \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X\wedge X' \xrightarrow{1\wedge u} \Sigma^{n\omega+\bar\omega}\Sigma^{\bar v}$$, 即ち $\Gamma_u^\alpha\{f\} = \{u_{n\omega+\bar\omega,0}\circ f\}$

又 G-map $f': \Sigma^{n\omega+\bar v} Y \to \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X'$ に対し $\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\} \in \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G$ は次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar v} X\wedge Y \overset{T\wedge 1}{\cong} X\wedge \Sigma^{n\omega+\bar v} Y \xrightarrow{1\wedge f'} X\wedge \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X' \xrightarrow{u_{0,n\omega+\bar\omega}} \Sigma^{n\omega+\bar\omega}\Sigma^{\bar v}$$

即ち, $\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\} = \{u_{0,n\omega+\bar\omega}\circ(1\wedge f')\circ(T\wedge 1)\}$

<u>定理 2.1</u> $u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar v}$ を duality G-map とする。このとき finite G-complex Y, $\alpha \in RO(G)$ に対して Γ_u^α, $\bar\Gamma_u^\alpha$ は同型である。

$$\Gamma_u^\alpha : \{Y, X\}_\alpha^G \cong \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G, \quad \bar\Gamma_u^\alpha : \{Y, X'\}_\alpha^G \cong \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar v}\}_\alpha^G$$

[証明] Γ_u^α のみを考える。$\bar\Gamma_u^\alpha$ も同様にすればよい。

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma^{n\omega+\bar v} Y, \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X]^G} \arrow[rr, "u_{n*}"] \arrow[dr, "\lambda_{n*}"'] & & {[\Sigma^{n\omega+\bar v} Y\wedge X', \Sigma^{n\omega+\bar\omega}\Sigma^{\bar v}]^G} \arrow[dl, "\mu_{n*}"] \\
& {[\Sigma^{n\omega+\bar v} Y, F(X', \Sigma^{n\omega+\bar\omega}\Sigma^{\bar v})]^G} &
\end{tikzcd}$$

ここで, $u_{n*}[f] = [u_{n\omega+\bar\omega,0}\circ f\wedge 1]$, $\lambda_n(x)(x') = u_{n\omega+\bar\omega,0}(x, x')$ $x \in \Sigma^{n\omega+\bar\omega} X$, $x' \in X'$, μ_{n*} は adjoint isomorphism である。又, $\varinjlim_n u_{n*} = \Gamma_u^\alpha$ であるから, 十分大なる n に対して λ_{n*} が同型であれば Γ_u^α が同型になる。従って λ_n を考えればよい。

次の可換図式を考える。 $(H \in \mathcal{A}(G))$

$$\begin{tikzcd}
\pi_j((\Sigma^{n\omega+\overline{w}}X)^H) \arrow[rr, "\lambda^H_{n*}"] \arrow[dr, "\psi_{H,n*}"'] & & \pi_j(F(X', \Sigma^{n\omega+\overline{w}}\Sigma^{\nabla})^H) \arrow[dl, "r_{H*}"] \\
& \pi_j(F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\overline{w}}\Sigma^{\nabla})^H) &
\end{tikzcd}$$

ここで r_H は restriction, $\psi_{H,n}(x)(x') = u^H_{n\omega+\overline{w},0}(x,x')$ である。[12] により $\psi_{H,n*}$ は $(\Sigma^{n\omega+\overline{w}}X)^H, F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\overline{w}}\Sigma^{\nabla})^H)$ が 1-connected なら, $j < 2(k - \dim X'^H)$, $k = \dim(n\omega+\overline{w}+\nabla)^H$ のとき同型であり r_{H*} は補題1.7より $j \leq \min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N^H_{H'}$ のとき同型である。

ここで
$$N^H_{H'} = \begin{cases} n\dim\omega^{H'} + \dim(\overline{w}+\nabla)^{H'} - 1 - \dim(X'^{H'} - X'^H) & \text{if } X'^{H'} \neq X'^H \\ \infty & \text{if } X'^{H'} = X'^H \end{cases}$$

従って λ^H_{n*} は $j \leq (n-1) + \dim(n\omega+\overline{w}+\nabla)^H - 2\dim X'$ のとき同型, 従って命題1.3より λ_{n*} は $n \geqq 2\dim X' + \dim Y + \dim \nabla + 2$ のとき同型, 即ちこのとき u_{n*} も同型であるから $\mathcal{D}_u^\alpha$ は同型である。

終

命題2.2　X, X' を $\Sigma^{\nabla+1}(\Sigma^{\nabla+\mathbb{R}})$ の G-subcomplex で $X, X' \in \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$, $X \cap X' = \phi$, かつ inclusion $X' \hookrightarrow \Sigma^{\nabla+1} - X$ が G-homotopy equivalence であるものとする。このとき ∇-duality G-map $u: X \wedge X' \to \Sigma^{\nabla}$ が存在する。

u の構成は [11] と同様にすればよい。このとき再び [11] により u^H が duality map となり命題を得る。

定理2.3　任意の finite G-complex X には S-dual が存在する。

[証明] もし，$X \notin \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ なら，$\Sigma X \in \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ をとることにより $X \in \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ と仮定してよい。$X \underset{G}{\simeq} K$ なる finite simplicial G-complex が存在するのでこれにおきかえて考える。適当な Σ^{V+1} をとり K を Σ^{V+1} に(単体的に) G-subcomplex としてうめこみ，その補複体 X' が $X' \in \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ となる様にできる。従って上の命題より結果を得る。 終

<u>定理 2.4</u> X を compact smooth G-manifold とする。ν をある(同変)うめこみ $(X, \partial X) \subset (B(V+\mathbb{R}), S(V+\mathbb{R}))$ の normal bundle とすると，Thom space $T(\nu)$ は $X/\partial X$ の S-dual である。ここで $B(V+\mathbb{R}), S(V+\mathbb{R})$ は $V+\mathbb{R}$ の unit ball と unit sphere である。

これは Atiyah [4] proposition (3.2) の equivariant version であり，証明も同様にすればよい。又上の $V+\mathbb{R}$ は，$V^G \neq \phi$ なら V でおきかえてもよい。

例. $G/H^+ = G/H \cup \{pt\}$ は G/H^+ の S-dual である。(G: finite に注意)

以下の結果 2.5 〜 2.8 は Spanier [12] p365 以下に対応し，証明も同様にできる。(又は [12] の結果を使えばよい。)

<u>定理 2.5</u> $u: X \wedge X' \to \Sigma^V$, $v: Y \wedge Y' \to \Sigma^V$ を duality とすると同型 $D^\alpha_V(u,v) = (\bar{D}^\alpha_u)^{-1} \circ D^\alpha_v : \{X, Y\}^G_\alpha \cong \{Y', X'\}^G_\alpha$ が存在して，$D^\alpha_V(\bar{u}, \bar{v})$ が逆写像であり，又十分大なる n と $f: \Sigma^{nW+U}X \to \Sigma^{nW+W}Y$, $f': \Sigma^{nW+U}Y' \to \Sigma^{nW+W}X'$ に対し，$D^\alpha_V(u,v)\{f\} = \{f'\}$ となるのは，次の図式が G-homotopy 可換であるときに限る。

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{n\omega+\bar{V}} X \wedge Y' & & = & & X \wedge \Sigma^{n\omega+\bar{V}} Y' \\ \downarrow f\wedge 1 & & & & \downarrow 1\wedge f' \\ \Sigma^{n\omega+\bar{W}} Y \wedge Y' & \xrightarrow{v_{n\omega+\bar{W},0}} & \Sigma^{n\omega+\bar{W}}\Sigma^{V} & \xleftarrow{u_{0,n\omega+\bar{W}}} & X \wedge \Sigma^{n\omega+\bar{W}} X' \end{array}$$

。

suspension 同型 $\sigma^{V} : \{X, Y\}^G_\alpha \to \{\Sigma^V X, \Sigma^V Y\}^G_\alpha$ を $\{f\} \in \{X, Y\}^G_\alpha$

$f : \Sigma^{n\omega+\bar{V}} X \to \Sigma^{n\omega+\bar{W}} Y$ に対し, 写像の合成

$$\Sigma^{n\omega+\bar{V}}\Sigma^V X \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^V \Sigma^{n\omega+\bar{V}} X \xrightarrow{1\wedge f} \Sigma^V \Sigma^{n\omega+\bar{W}} Y \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^{n\omega+\bar{W}}\Sigma^V Y$$

で定義する。　このとき, 次が成立する。 //

<u>命題 2.6</u>　$u : X\wedge X' \to \Sigma^V$, $v : Y \wedge Y' \to \Sigma^V$ を duality とする。このとき次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \{X, Y\}^G_0 & \xrightarrow{D^0_V(u,v)} & \{Y', X'\}^G_0 \\ \downarrow \sigma^{\bar{V}} & \nearrow{\scriptstyle D^0_{V+\bar{V}}(u_{\bar{V},0}, v_{\bar{V},0})} & \\ \{\Sigma^{\bar{V}} X, \Sigma^{\bar{V}} Y\}^G_0 & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \{X, Y\}^G_0 & \xrightarrow{D^0_V(u,v)} & \{Y', X'\}^G_0 \\ & \searrow{\scriptstyle D^0_{V+\bar{V}}(u_{0,\bar{V}}, v_{0,\bar{V}})} & \downarrow \sigma^{\bar{V}} \\ & & \{\Sigma^{\bar{V}} Y', \Sigma^{\bar{V}} X'\}^G_0 \end{array}$$

<u>命題 2.7</u>　$u : X\wedge X' \to \Sigma^V$, $v : Y\wedge Y' \to \Sigma^V$, $w : Z\wedge Z' \to \Sigma^V$ を duality とする。$\alpha \in \{X, Y\}^G_0$, $\beta \in \{Y, Z\}^G_0$ とするとき, $\beta\alpha \in \{X, Z\}^G_0$ で

$D^0_V(u, w)\beta\alpha = (D^0_V(u,v)\alpha) \circ (D^0_V(v, w)\beta)$ である。 //

$u : X\wedge X' \to \Sigma^V$, $v : Y \wedge Y' \to \Sigma^V$ を duality とする。

$f : X \to Y$, $f' : Y' \to X'$ に対し, 次の図式は G-homotopy 可換

$$\begin{array}{ccc} X\wedge Y' & \xrightarrow{1\wedge f'} & X \wedge X' \\ f\wedge 1 \downarrow & & \downarrow u \\ Y \wedge Y' & \xrightarrow{v} & \Sigma^V \end{array}$$

とする。このとき　$w : C_f \wedge C_{f'} \to \Sigma\Sigma^V = \Sigma^{1+V}$ を [12] p374 と同様に定義する。(但し parameter の位置は逆)　C_f は f の mapping cone である。

<u>定理 2.8</u>　上に定義した w は $(V+\mathbb{R})$-duality G-map であり,

次の $(\mathbb{V}+\mathbb{R})$-duality の G-homotopy 可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X\wedge\Sigma Y' \arrow[dl, "1\wedge\Sigma f'"'] \arrow[dr, "f\wedge 1"] & & Y\wedge C_{f'} \arrow[dl, "1\wedge p'"'] \arrow[dr, "i\wedge 1"] & & C_f\wedge X' \arrow[dl, "1\wedge i'"'] \arrow[dr, "p\wedge 1"] & & \Sigma X\wedge Y' \arrow[dl, "1\wedge f'"'] \arrow[dr, "\Sigma f\wedge 1"] & \\
X\wedge\Sigma X' \arrow[d, "u_{0,1}"] & & Y\wedge\Sigma Y' \arrow[d, "v_{0,1}"] & & C_f\wedge C_{f'} \arrow[d, "w"] & & \Sigma X\wedge X' \arrow[d, "u_{1,0}"] & & \Sigma Y\wedge Y' \arrow[d, "v_{1,0}"] \\
\Sigma^{1+\mathbb{V}} \arrow[rr, equal] & & \Sigma^{1+\mathbb{V}} \arrow[rr, equal] & & \Sigma^{1+\mathbb{V}} \arrow[rr, equal] & & \Sigma^{1+\mathbb{V}} \arrow[rr, equal] & & \Sigma^{1+\mathbb{V}}
\end{tikzcd}$$
。//

duality G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^{\mathbb{V}}$, finite G-complex Y, G-complex Z に対し，準同型 $\Gamma_u^\alpha(Y,Z): \{Y, X\wedge Z\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^{\mathbb{V}} Z\}_\alpha^G$ を，次の写像の合成で定義する。

$$\{Y, X\wedge Z\}^G_\alpha \xrightarrow{(\wedge X')_*} \{Y\wedge X', X\wedge Z\wedge X'\}^G_\alpha \xrightarrow{(1\wedge T)_*} \{Y\wedge X', X\wedge X'\wedge Z\}^G_\alpha \xrightarrow{(u\wedge 1)_*} \{Y\wedge X', \Sigma^{\mathbb{V}} Z\}^G_\alpha$$

<u>定理 2.9</u>　上の $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ は，同型である。 //

Z が finite G-complex の場合は [12] と同様にできる。Z が G-complex の場合，$\{Y, X\wedge(\ )\}^G_\alpha$, $\{Y\wedge X', \Sigma^{\mathbb{V}}(\ )\}^G_\alpha$ は共に加法性公理をみたす G-complex 上の reduced G-homology theory になり，比較定理により，$Z=G/H^+$, $H\in\mathcal{A}(G)$ の場合に $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ が同型であるから，Z が G-complex のときにも同型である。

$\mathbb{E}$ を G-spectrum とする。G-complex X に対し

$$[X,\mathbb{E}]^G_\alpha = \varinjlim_n [\Sigma^{nW+\bar{V}}X, \Sigma^{\bar{W}}E_n]^G = \varinjlim_m \varinjlim_n [\Sigma^{mW}\Sigma^{nW+\bar{V}}X, \Sigma^{mW}\Sigma^{\bar{W}}E_n]^G$$

であるから，　$[X,\mathbb{E}]^G_\alpha = \varinjlim_n \{\Sigma^{nW+\bar{V}}X, \Sigma^{\bar{W}}E_n\}^G_0$ 　である。

<u>定理 2.10</u>　$u: X\wedge X'\to\Sigma^{\mathbb{V}}$ を duality, $\mathbb{E}$ を G-spectrum Y を finite G-complex とする。このとき同型

$$\Gamma_u^\alpha(Y,\mathbb{E}): [Y, X\wedge\mathbb{E}]^G_\alpha \cong [Y\wedge X', \Sigma^{\bar{W}}\mathbb{E}]^G_\alpha \overset{(\sigma_*^{\bar{W}})^{-1}}{\cong} [Y\wedge X', \mathbb{E}]^G_{\alpha-\bar{W}}$$

が成り立つ。ここで $\sigma_*^{\bar{W}}$ は G-homology の suspension 同型である。

特に $\tilde{h}_G^\alpha(X;\mathbb{E}) = [X, \mathbb{E}]_{-\alpha}^G$, $\tilde{h}_\alpha^G(X;\mathbb{E}) = [\Sigma^0, \mathbb{E}\wedge X]_\alpha^G$ とおくと、

$\tilde{h}_G^*$は reduced G-cohomology theory に、$\tilde{h}_*^G$ は reduced G-homology theory になる。従って定理2.10より次を得る。

<u>系2.11</u> $\Gamma(\Sigma^0,\mathbb{E})$; $\tilde{h}_\alpha^G(X;\mathbb{E}) \cong \tilde{h}_G^{V-\alpha}(X;\mathbb{E})$

$\tilde{h}_*^G$を finite G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の G-homology theory とする。finite G-complex X に対し S-dual X′ が存在するから、

u ; $\Sigma^{V_1}X\wedge\Sigma^{V_2}X' \to \Sigma^V$ をこの duality G-map とする。$\alpha\in RO(G)$ に対し、$\tilde{h}_G^\alpha(X) = \tilde{h}^G_{V-V_1-V_2-\alpha}(X')$ と定義し、[1] p250と同様の考察を行なえば、$\tilde{h}_G^*$ が $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の reduced G-cohomology theory になることが分かる。又[2]により $\tilde{h}_G^*$ は Ω-G-spectrum で表現される。従って次を得る。(これは、G.W. Whitehead [14] の方法である。)

<u>定理2.12</u> $\mathcal{C}\mathcal{F}^G$ 上の G-homology theory は Ω-G-spectrum で表現される。又 G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{W}^G$ 上の G-homology theory (加法性公理をみたす) は Ω-G-spectrum で表現される。

$G=\mathbb{Z}_2$ の場合、MR-theory を考える。[7] cf.[3]. smooth $\mathbb{Z}_2$-manifold M の normal bundle ν が[7] の意味の 'real' vector bundle になるとき、M を weakly 'real-complex' manifold と呼ぶことにする。このとき Thom class $t(\nu)\in MR^{n,n}(T(\nu))$ $(n=\dim\nu)$ と Thom 同型 $\Phi(\nu)^*$; $MR^{p,q}(M)\cong\widetilde{MR}^{p+n,q+n}(T(\nu))$,

$\Phi(\nu)_*$; $\widetilde{MR}_{p+n,q+n}(T(\nu))\cong MR_{p,q}(M)$, が存在する。[7] 又 $\Phi M=M^{\mathbb{Z}_2}$ は uniform dimension をもつ。定理2.4とこれを組み合わせ

て次を得る。

定理 2.13 M を $\dim M = m+n$, $\dim \Phi M = n$ なる compact weakly 'real complex' manifold とする。このとき (Poincare) duality 同型

$$D_M : MR_{p,q}(M) \cong MR^{m-p,n-q}(M, \partial M),$$

$$D'_M : MR_{p,q}(M, \partial M) \cong MR^{m-p,n-q}(M) \quad , \quad p, q, m, n \in \mathbb{Z}$$

が存在する。

参考文献

[1] 荒木捷朗. 一般コホモロジー, 紀伊国屋書店 1975

[2] S. Araki, M. Murayama G-homotopy types of G-complex and representations of G-cohomology theories. to appear Pull. R.I.M.S Kyoto Univ.

[3] S. Araki, M. Murayama τ-cohomology theories to appear Japanese J. of Math.

[4] M.F. Atiyah Thom complexes Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 291-310

[5] A.L. Blakers, W.S. Massey The homotopy groups of a triad I, II. Ann. of Math 53 (1951) 161-205, 55 (1952) 192-201

[6] G. Bredon. Equivariant cohomology theories Lect. Note in Math 34, 1967

[7] M. Fujii Cobordism theory with reality Math J. Okayama Univ. 18 (1976) 171-188

[8]. 小松. 中岡. 菅原. 位相幾何学 I, 岩波書店 1967

[9] T. Matumoto. On G-C_W complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 18 (1971) 363-374.

[10] T. Matumoto Equivariant stratification of a differentiable transformation

group (to appear)

[11] E. H Spanier Infinite symmetric product, function spaces, and duality Ann. of Math. 69 (1959) 142-198

[12] E. H Spanier Function spaces and duality. Ann. of Math 70 (1959) 338-378

[13] E. H. Spanier Algebraic topology Mc Graw-Hill 1966.

[14] G. W Whitehead Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283